

# Klausurtag 2

## Zusatzmaterial

### für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren

Potentialanalyse – Lösungswege von linearen Gleichungssystemen vergleichen

#### Der Rahmen

Inhalt	Lösungswege von linearen Gleichungssystemen vergleichen
Anwendungsbereich im Rahmen Fortbildung	<b>Klausurtag 2:</b> Potentiale digitaler Medien – Technische Tätigkeiten entlasten  <b>ICAP:</b> Konstruktiv (C), Interaktiv (I) <b>SAMR:</b> Ersatz (S)
Verortung im Lehrplan	<b>MS M: 9.7</b> – Gleichungen <b>RS I: 9.6</b> – Systeme linearer Gleichungen <b>RS II/III: 9.6</b> – Systeme linearer Gleichungen <b>Gym: 8.6</b> – Lineare Gleichungssysteme
Voraussetzungen	Die Schülerinnen und Schüler kennen das Einsetzungs-, Additions- und Gleichsetzungsverfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.
Ziele	Die Schülerinnen und Schüler erklären das Einsetzungs-, Additions- und Gleichsetzungsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Die Schülerinnen und Schüler analysieren lineare Gleichungssysteme im Hinblick darauf, welche Lösungsstrategie sinnvoll ist. Die Schülerinnen und Schüler vergleichen die genannten Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen, indem sie Vor- und Nachteile benennen.

## Materialien

Digitale Umsetzung: (ausschließlich)	Arbeitsblatt mit Aufgabenstellung. Notwendige App am Handy installiert. Vorlagenblatt, um Lösungswege und Arbeitsergebnisse festzuhalten.  <a href="https://epub.ub.uni-muenchen.de/94230/1/Beispiel_Loesungswege-LGS.html">https://epub.ub.uni-muenchen.de/94230/1/Beispiel_Loesungswege-LGS.html</a>
---	--

## Arbeitsaufträge

### Digitale Lernaktivität

#### Lineare Gleichungssysteme lösen – auf welchem Weg?

$$\begin{aligned}x &= 2,5 - 1,5y \\4x - 5 &= -2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x + 6y &= 10 \\-4x + 5 &= 2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x &= 5 - 3y \\2x &= -y + 2,5\end{aligned}$$

Einsetzungsverfahren / Substitutionsmethode

Additionsverfahren

Gleichsetzungsverfahren / Vergleichsmethode

Gegeben sind diese drei linearen Gleichungssysteme. Verwendet in eurer Gruppe (3 Personen) die photomath-App, um die jeweilige Lösungsmenge zu bestimmen. Nutzt zur Bearbeitung die Vorlage [Anm.: s. Download im Material].

#### Einzelarbeitsphase

1. Jedes Gruppenmitglied wählt **ein** lineares Gleichungssystem aus und löst dieses mit den **drei** Lösungsverfahren (**Einsetzungsverfahren / Substitutionsmethode**, **Additionsverfahren**, **Gleichsetzungsverfahren / Vergleichsmethode**).
2. Beschreibe zu dem von Dir gewählten Gleichungssystem das jeweilige Lösungsverfahren auf der Vorlage.
3. Vergleiche dann die verschiedenen Lösungsverfahren miteinander und schreibe Vor- und Nachteile Deines Lösungsverfahrens auf. Nutze dazu wieder die Vorlage.

#### Gruppenarbeitsphase

4. Stellt Euch die verschiedenen Lösungsverfahren mit ihren jeweiligen Eigenschaften vor.
5. Wählt zufällig eines der Verfahren aus. Stellt lineare Gleichungssysteme auf, die besonders gut oder besonders schlecht mit diesem Verfahren gelöst werden können. Vergleicht dann die Lösungsmethoden aus der App.
6. Vergleicht die drei Lösungsverfahren miteinander und entwickelt Kriterien, bei welchen linearen Gleichungssystemen welches Verfahren sinnvoller anwendbar ist. Wie erkennt man an der Aufgabe, dass sich besonders eines der Verfahren eignet? Gebt dazu auch neue Beispiele an und haltet Eure Ergebnisse in der **Zusammenfassung** fest.

## Analyse der Lernaktivität

Worum geht es hier?

Potentiale digitaler Medien – Technische Tätigkeiten entlasten (Arbeitsauftrag Klausurtag 2)

Lineare Gleichungssysteme zweiter Ordnung können auf unterschiedliche Arten gelöst werden. Dementsprechend lernen Schülerinnen und Schüler auch unterschiedliche Lösungsverfahren wie z. B. das Einsetzungsverfahren, das Gleichsetzungsverfahren, oder auch das Additions- / Subtraktionsverfahren kennen, damit sie verschiedene Verfahren möglichst flexibel beherrschen.

Jedoch ist es häufig geschickt, sich vor dem Lösen eines Gleichungssystems zu überlegen, welches dieser Lösungsverfahren verwendet werden soll (adaptive Strategiewahl). Denn je nach den konkreten Zahlenwerten in den Gleichungen sind diese Verfahren unterschiedlich hilfreich (oder auch umständlich) in der Anwendung. Ziel ist es, dass die Lernenden flexibel und adaptiv ein Verfahren bei einer gegebenen Gleichung auswählen können.

Um den Fokus konkret auf den Vergleich der drei unterschiedlichen Methoden zu setzen und nicht (für das Lernziel) unnötige Zeit und kognitive Ressourcen der Schülerinnen und Schüler zu verbrauchen, übernimmt die App die Berechnung der Lösungsmenge. Die Gleichung wird abfotografiert und durch die App automatisch erkannt. Diese gibt auch den Rechenweg mit aus. Es kann dann ausgewählt werden, mit welcher Methode das Gleichungssystem gelöst werden soll.

Über die Analyse der Lösungswege in Bezug auf die drei vorgegebenen Gleichungen werden die Lernenden aufgefordert, zunächst Gleichungen zu finden, die mit einzelnen Verfahren möglichst elegant bzw. eher kompliziert zu lösen sind und dies mit der App zu prüfen. Darauf aufbauend geht es darum konkrete Kriterien zu formulieren, die eine adaptive Entscheidung für ein Verfahren leiten könnten.

Zur App: Die hier exemplarisch genutzte App ist z. B. für iOS kostenfrei und ohne Registrierung nutzbar (in-App-Käufe sind möglich, aber für diese Aktivität nicht notwendig). Die Menüführung und die Bedienung sind intuitiv und sollte die Schülerinnen und Schüler vor keine Probleme stellen.

Optimierungsmöglichkeiten für Material und Lernaktivität (Arbeitsauftrag Klausurtag 2)

- Eine Variante der Aktivität wäre, mehrere vorgegebene Gleichungssysteme dem Verfahren zuzuordnen mit dem die Systeme möglichst einfach lösbar sind. Auch dies kann anhand der App geprüft werden.
- Wenn der Fokus auch auf der korrekten Anwendung der Verfahren (und nicht allein auf deren Auswahl) liegen soll, dann könnten die Lernenden die Gleichungssysteme auch selbst lösen und ihre Lösungen mit der App kontrollieren. Zu beachten ist, dass dabei zwar der Aufwand der ungünstigen Verfahren deutlicher erkennbar wird, dieser jedoch auch die Analyse der Rechenwege behindern kann.
- Die Suche nach besonders einfach oder schwer lösbar Verfahren kann leicht interaktiver gestaltet werden, indem wechselnde Rollen verteilt werden für die Auswahl des Verfahrens, die Auswahl des Ziels (leicht oder schwer lösbar), das Finden eines Gleichungssystems und das Prüfen mit der App ob das Gleichungssystem zu den Anforderungen passt.
- Die methodische Umsetzung (hier Einzel- und Gruppenarbeitsphase, Arbeitsvorlage) ist weitgehend austauschbar.

## Weitere Verwendungsmöglichkeiten in den Klausurtagen 2 bis 4

### Einstufung ICAP (als weiteres Beispiel für Klausurtag 2)

Die Arbeitsteilung in der vorbereitenden Einzelarbeitsphase regt alle Lernenden dazu an, sich mit dem Inhalt zumindest aktiv auseinanderzusetzen. Aktive Tätigkeiten wären das Abschreiben des Lösungsverfahrens, das die App vorgibt, ohne zentrale Schritte des jeweiligen Verfahrens herauszuarbeiten oder eine Bewertung vorzunehmen.

Dies ist zwar möglich, der Arbeitsauftrag fordert jedoch insofern eine konstruktive Verarbeitung ein, da selbst wesentliche Aspekte der Verfahren herauszuarbeiten und zu vergleichen sind. Dies sind jeweils konstruktive Prozesse. Dasselbe gilt für das Entwickeln und Prüfen von Linearen Gleichungssystemen, die mit bestimmten Verfahren mehr oder weniger elegant lösbar sind.

Interaktive Prozesse sind im Arbeitsauftrag angelegt, indem die Analysen der einzelnen Strategien abgeglichen werden müssen.

### Einstufung SAMR (als weiteres Beispiel für Klausurtag 2)

Die unterschiedlichen Lösungsverfahren könnten auch gleichermaßen auf Papier den Schülern ausgeteilt werden. Die App ist somit lediglich ein Ersatz für diese Möglichkeit. Diese digitale Umsetzung bietet in diesem Fall zunächst einen eher kleinen Mehrwert für den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler. Ein solcher entsteht erst im Sinne einer Verbesserung, wenn die Lernenden die Verfahren anhand mehrerer Beispiele durchdringen.

Verwenden die Schülerinnen und Schüler die App jedoch dazu um für eigene Beispiele zu prüfen, wie aufwändig eine Lösungsmethode ist bzw. welche Lösungsmethode die App vorschlägt, so ist dies mit herkömmlichen Materialien nicht mehr möglich. Das Lernen der Schülerinnen und Schüler wird dahingehend verändert, dass der Fokus nicht mehr allein auf dem eigenständigen Rechnen liegt, sondern Strategieentscheidungen zeitsparend geprüft werden können. Dies verändert den Fokus der Lernprozesse grundlegend und geht über eine einfache Verbesserung hinaus.

### Einordnung strukturorientierter Konzeptaufbau (als weiteres Beispiel für Klausurtag 3)

#### *Leitfragen nutzen*

Die Aktivität greift ein typisches Problem in der Mathematik auf, dass es mehrere Lösungswege gibt, die zu einem Ergebnis führen. Die Frage ist jedoch, welcher dieser Lösungswege - in Abhängigkeit von der jeweiligen Situation - der geschickteste ist. Eine mögliche Leitfrage könnte sein, wie man beim Gleichungssysteme mit einfachen (ganze) Zahlen möglichst effizient und ggf. sogar im Kopf lösen kann.

#### *Verstehenselemente einbinden*

Die Aktivität baut auf dem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler über die drei Lösungsverfahren auf und verbindet diese miteinander. Die charakteristischen Eigenschaften der jeweiligen Lösungsverfahren werden durch die Schülerinnen und Schüler selbst erarbeitet und dementsprechend auch für die Schülerinnen und Schüler selbst in den Fokus gesetzt. Ein wesentliches Verstehenselement ist dabei worauf bei Gleichungen geachtet werden kann, um ein bestimmtes Verfahren als vorteilhaft zu erkennen (z. B.

Lizenzhinweis: „Potentialanalyse – Lösungswege von linearen Gleichungssystemen vergleichen“, erstellt von [Timo Kosiol](#), [Matthias Mohr](#), [Christian Lindermayer](#) und [Stefan Ufer](#) im Projekt [DigitUS](#) und lizenziert als [CC-BY-SA 4.0](#).

gleiche Koeffizienten mit unterschiedlichen Vorzeichen beim Additionsverfahren). Zentral ist zunächst, dass diese Eigenschaften in den Begründungen für oder gegen bestimmte Strategien überhaupt angesprochen werden. Wie sehe ich das an schon der Gleichung?

#### *Darstellungen verknüpfen*

- Darstellungen zu vernetzen, ist kein zentrales Prinzip der Aktivität.

#### *Phänomene und Konzepte verbinden*

- Phänomene und Konzepte zu verbinden, ist kein zentrales Prinzip der Aktivität.

Einordnung kognitive Aktivierung (als weiteres Beispiel für Klausurtag 4)

#### *Tiefe Verarbeitung anregen*

Die Aktivität greift das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler über die unterschiedlichen Lösungsverfahren auf. Ziel des ersten Schrittes der Aktivität ist es, strategische Entscheidungen für oder gegen ein Verfahren zu treffen und zu reflektieren, ohne dass das Verfahren selbst schriftlich durchgeführt werden muss. Es werden Vor- und Nachteil des jeweiligen Lösungsverfahrens beschrieben. Aufbauend auf dieser Beschreibung werden dann die drei Methoden miteinander verglichen und analysiert, welche Gestalt ein Gleichungssystem haben muss, damit es mit einem speziellen Lösungsverfahren besonders einfach gelöst werden kann. Dies verlangt eine tiefe Verarbeitung und Auseinandersetzung mit dem Vorgehen bei den drei Lösungsverfahren.

Eine vertiefte Verarbeitung wird ebenfalls angeregt, wenn die Schülerinnen und Schüler Beispiele für Gleichungssysteme suchen, für die sich ein Lösungsverfahren besonders (wenig) anbietet. Dazu muss ein Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Lösungsverfahren und den Merkmalen eines Gleichungssystems hergestellt werden.

#### *Anforderungen fokussieren*

Der technische Aspekt von linearen Gleichungssystemen, das Berechnen der Lösungsmenge, wird bei dieser Aktivität bewusst ausgeklammert. Der Fokus wird zentral auf den Vergleich der drei Lösungsverfahren gelegt. Für die Erreichung des Lernziels ist das Durchführen des jeweiligen Algorithmus keine notwendige Voraussetzung, damit stellt er potenziell ein Hindernis dar, um sich mit dem Inhalt des Lernziels auseinanderzusetzen.

#### *Fehler nutzen*

Fehler zu nutzen, ist kein zentrales Prinzip der Aktivität. Dennoch können typische Fehler bei Gleichungssystemen natürlich thematisiert werden, sofern selbst Berechnungen angestellt werden.

Wenn Lernende sich zunächst auf ein Lösungsverfahren beschränken, ist das an sich kein fachlicher Fehler. Dennoch kann es die Möglichkeiten der Lernenden einschränken, schnell und effizient vorzugehen. Die Vorteile eines flexiblen Vorgehens (z. B. auch bei der Entscheidung, ob ein Gleichungssystem im Kopf, auf Papier oder mit einem Computersystem gelöst wird) können in diesem Kontext diskutiert werden.

### *Lernprozess unterstützen*

Die technischen Berechnungen werden durch die App übernommen. Außerdem werden die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung und bei ihrem Lernprozess durch eine strukturgebende Vorlage, die an die Placemat-Methode angelehnt ist, unterstützt.

Das Analysieren der bekannten Lösungsverfahren und das Aufschreiben der Vor- und Nachteilliste erfolgt arbeitsteilig, um alle Schülerinnen und Schüler in den Bearbeitungsprozess zu integrieren. Dabei muss jeder Lernende einen Beitrag leisten, damit gemeinsam das Ziel erreicht wird. Die Lehrkraft kann dies ggf. unterstützen, indem weitere Beispiele für Lineare Gleichungssysteme zur Analyse eingebracht werden, die die Unterschiede zwischen den Verfahren klar hervortreten lassen.

Für eine gemeinsame Diskussion wäre darauf zu achten, dass die wesentlichen Aufgabenmerkmale, die für oder gegen einzelne Verfahren sprechen, in den diskutierten Lösungen vorkommen. Auch hier kann die Lehrkraft durch selbst eingebrachte Beispiele die Diskussion in den Gruppenarbeitsphasen oder in der Gesamtgruppe noch weiter anreichern.